

Chuyên đề 1:

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Thông thường ta gặp các loại tích phân sau đây:

- +) Loại 1: Tích phân của hàm số đa thức phân thức hữu tỷ.
- +) Loại 2: Tích phân của hàm số chứa căn thức
- +) Loại 3: Tích phân của hàm số lượng giác
- +) Loại 4: Tích phân của hàm số mũ và logarit

Đối với các tích phân đó có thể tích theo các phương pháp sau:

1) Phương pháp biến đổi trực tiếp

Dùng các công thức biến đổi về các tích phân đơn giản và áp dụng được $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

+) Biến đổi phân thức về tổng hiệu các phân thức đơn giản

Ví dụ 1. Tính:

$$1. I = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3} dx \text{ ta có } I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| + \frac{2}{x} \right) \Big|_1^2 = (\ln 2 + 1) - (\ln 1 + 2) = \ln 2 - 1$$

$$2. J = \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x} - 3x + 4}{x} dx = \int_1^{e^2} \left(2x^{-1/2} - 3 + \frac{4}{x} \right) dx = \left(4\sqrt{x} - 3x + 4\ln|x| \right) \Big|_1^{e^2} = -3e^2 + 4e + 7$$

$$3. K = \int_1^8 \frac{4\sqrt[3]{x^5} - 3x - 1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^8 \left(\frac{4}{3}x - x^{1/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3} \right) dx = \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x} \right) \Big|_1^8 = \frac{207}{4}$$

+) Biến đổi nhờ các công thức lượng giác

Ví dụ 2. Tính:

$$1. I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2x + \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$2. J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x \sin 7x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(-5x) - \cos 9x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 9x}{9} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{45}$$

$$3. K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x \sin 7x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 7x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 4x + \sin 10x) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 10x}{10} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$4. H_0 = \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \sin 2x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left(-\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \text{ hoặc biến đổi}$$

$$H = \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \sin 2x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left(-\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x \right) \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$5. G = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = (-2 \sin x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = -1$$

$$6. E = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (3 + \cos 4x - 4 \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \frac{\sin 4x}{4} - \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$7. F = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{4 - \pi}{4}. \text{ Đề xuất: } F_1 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x dx \text{ và}$$

$$F_2 = \int_0^{\pi/4} \tan^4 x dx$$

+) Biến đổi biểu thức ở ngoài vì phân vào trong vì phân

Ví dụ 3. Tính:

$$1. I = \int_0^1 (2x + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x + 1)^3 d(2x + 1) = \frac{1}{2} \frac{(2x + 1)^4}{4} \Big|_0^1 = 10$$

$$2. J = \int_1^2 \frac{1}{(2x - 1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x - 1)^{-3} d(2x - 1) = \frac{1}{2} \frac{(2x - 1)^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \frac{1}{(2x - 1)^2} \Big|_1^2 = 0$$

$$3. K = \int_1^{7/3} \sqrt{3x-3} dx = \frac{1}{3} \int_1^{7/3} (3x-3)^{1/2} d(3x-3) = \frac{2}{9} \sqrt{(3x-3)^3} \Big|_1^{7/3} = \frac{16}{9}$$

$$4. H = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}} = -\frac{1}{3} \int_0^4 (25-3x)^{-1/2} d(25-3x) = -\frac{2}{3} (25-3x)^{1/2} \Big|_0^4 = \frac{10-2\sqrt{13}}{3}$$

$$5. G = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x-1) - (x+1)} dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}{3}$$

(Nhân cả tử và mẫu với bt liên hợp của mẫu số)

$$\text{Đề xuất } G_1 = \int \frac{1}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax+c}} dx = \frac{1}{a(b-c)} \left(\sqrt{(ax+b)^3} + \sqrt{(ax+c)^3} \right) + C \text{ với } a \neq 0; b \neq c$$

$$6. P = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \int_0^1 (x-1+1)\sqrt{1-x} dx = -\int_0^1 (x-1)\sqrt{1-x} d(1-x) + \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{4}{5}$$

$$7. Q = \int_0^1 e^{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{1-x^2} d(1-x^2) = -e^{1-x^2} \Big|_0^1 = e-1$$

$$\text{Đề xuất } Q_1 = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{4-6\sqrt{2}}{15} \text{ HD đưa } x \text{ vào trong vi phân và thêm bớt } (x^2+1-1).$$

Ví dụ 4. Tính:

$$1. I_1 = \int_0^{\pi} (2 \cos 3x + 3 \sin 2x) dx = 0; I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \text{ và } I_3 = \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x dx = e-1$$

$$2. J_1 = \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \ln \sqrt{2}; J_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot x dx = \ln \sqrt{2} \text{ và } J_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx = \frac{2}{3} \ln 2$$

(đưa sinx, cosx vào trong vi phân)

$$3. K_1 = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = 1 - \cos 1; K_2 = \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = 1 - \cos 2 \text{ và } K_3 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = 2$$

{đưa 1/x vào trong vi phân để được d(lnx)}

$$4. H_1 = \int_1^{\ln 3} \frac{e^x}{2+e^x} dx = \ln |2+e^x| \Big|_1^{\ln 3} = \ln \frac{5}{2+e}$$

$$H_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} dx - 2 \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = 3 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$H_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+5} = \frac{1}{5} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+5-e^x)dx}{e^x+5} = \frac{1}{5} \int_0^{\ln 2} dx - \frac{1}{5} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+5} = \left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5} \ln |e^x+5| \right) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{5} \ln \frac{12}{7}$$

$$H_4 = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} \ln |e^{2x}+1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2+1}{2}$$

$$+) \text{ Biến đổi nhờ việc xét dấu các biểu thức trong giá trị tuyệt đối để tính } I = \int_a^b |f(x,m)| dx$$

- Xét dấu hàm số f(x,m) trong đoạn [a; b] và chia [a; b] = [a; c₁] ∪ [c₁; c₂] ∪ ... ∪ [c_n; b] trên mỗi đoạn hàm số f(x,m) giữ một dấu

$$\text{- Tính } I = \int_a^{c_1} |f(x,m)| dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x,m)| dx + \dots + \int_{c_n}^b |f(x,m)| dx$$

Ví dụ 5. Tính:

$$1. I = \int_0^2 |x^2+2x-3| dx \text{ Ta xét pt: } x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3. \text{ Bảng xét dấu } f(x)$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 |x^2 + 2x - 3| dx + \int_1^2 |x^2 + 2x - 3| dx = -\int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx = 4$$

$$2. J = \int_{-3}^1 |4x - x^3| dx \text{ tính tương tự ta có } J = \int_{-3}^{-2} |4x - x^3| dx + \int_{-2}^0 |4x - x^3| dx + \int_0^1 |4x - x^3| dx = 16$$

$$3. K = \int_0^3 |2^x - 4| dx = 4 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$4. H_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx + \sqrt{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2\sqrt{2}$$

$$H_2 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad \{\text{Viết } (1 - \sin 2x) \text{ về bình phương của một biểu thức rồi khai căn}\}$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx = \int_0^{\pi/4} |\sin x + \cos x| dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\sin x + \cos x| dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} |\sin x + \cos x| dx = 2\sqrt{2}$$

II) Phương pháp đổi biến số

A - Phương pháp đổi biến số dạng 1:

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Đặt $x = u(t)$
- Bước 2. Lấy vi phân $dx = u'(t)dt$ và biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt . Chẳng hạn $f(x)dx = g(t)dt$
- Bước 3. Đổi cận khi $x = a$ thì $u(t) = a$ ứng với $t = \alpha$; khi $x = b$ thì $u(t) = b$ ứng với $t = \beta$
- Bước 4. Biến đổi $I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$ (tích phân này dễ tính hơn thì phép đổi biến mới có ý nghĩa)

Cách đặt đổi biến dạng 1.

Cách đặt 1. Nếu hàm số chứa $\sqrt{1 - x^2}$ thì đặt $x = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2]$ hoặc đặt $x = \cos t; t \in [0; \pi]$

Ví dụ 1. Tính:

$$1. A = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \text{ ta đặt } x = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow dx = \cos t dt; \text{ đổi cận khi } x = \sqrt{2}/2 \text{ thì } t = \pi/4; \text{ khi } x$$

$$= 1 \text{ thì } t = \pi/2. \text{ Khi đó } A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \frac{4-\pi}{4}$$

$$2. B = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \text{ ta viết } B = \int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{1-(x/2)^2}} dx.$$

Đặt $(x/2) = \cos t; t \in [0; \pi] \Rightarrow x = 2 \cos t \Rightarrow dx = -2 \sin t dt$

$$\text{Đổi cận suy ra } B = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{(2 \cos t)^2}{2\sqrt{1-\cos^2 t}} (-2 \sin t dt) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt = 2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3. C = \int_0^1 x^2 \sqrt{4-3x^2} dx \text{ Trước hết ta viết } C = 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2} dx.$$

Đặt $\frac{\sqrt{3}}{2} x = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2]$ đưa tích phân về dạng:

$$C = \frac{16}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} + \frac{1}{12}$$

Chú ý:

- Nếu hàm số chứa $\sqrt{a-x^2}$, $a > 0$ thì ta viết $\sqrt{a-x^2} = \sqrt{a} \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}$ và đặt $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{a}} = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2] \\ \frac{x}{\sqrt{a}} = \cos t; t \in [0; \pi] \end{cases}$

- Nếu hàm số chứa $\sqrt{a-bx^2}$, $a, b > 0$ thì ta viết $\sqrt{a-bx^2} = \sqrt{a} \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x\right)^2}$ và đặt $\begin{cases} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2] \\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x = \cos t; t \in [0; \pi] \end{cases}$

Ví dụ 2. Tính:

$$1. E = \int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \quad \{\text{Viết tích phân về dạng } \sqrt{1-X^2}\}$$

ta viết $E = \int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1-(1/x)^2}} dx$ và đặt $\frac{1}{x} = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2]$ suy ra $E = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt = \frac{\pi}{12}$

$$2. G = \int_{2/\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}/3} \frac{\sqrt{3x^2-4}}{x^3} dx \quad \{\text{Viết tích phân về dạng } \sqrt{1-X^2}\}$$

ta viết $G = \int_{2/\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}/3} \frac{\sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{1-(2/\sqrt{3}x)^2}}{x^3} dx$ và đặt $\frac{2}{\sqrt{3}x} = \sin t; t \in [-\pi/2; \pi/2]$ suy ra tích phân có dạng

$$G = \frac{3\sqrt{3}}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{3}(\pi+6-3\sqrt{3})}{16} \quad \{\text{Nếu tích phân có dạng } \sqrt{ax^2-b} \text{ thì viết về dạng } \sqrt{1-X^2}\}$$

Cách đặt 2. Nếu tích phân có chứa $\sqrt{1+x^2}$ hoặc $(1+x^2)$ thì ta đặt $x = \tan t; t \in (-\pi/2; \pi/2)$ hoặc $x = \cot t; t \in (0; \pi)$

Ví dụ 3. Tính:

$$1. M = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{ta đặt } x = \tan t; t \in (-\pi/2; \pi/2) \text{ suy ra } M = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dt = \frac{\pi}{6}$$

$$2. N = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{ta đặt } x = \tan t; t \in (-\pi/2; \pi/2) \text{ suy ra } N = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{18-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$3. P = \int_0^a \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx; a \neq 0$$

ta viết $P = \int_0^a \frac{1}{a^4 \left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2} dx$ và đặt $\frac{x}{a} = \tan t; \Rightarrow P = \frac{1}{a^3} \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = \frac{\pi+2}{4a^3}$

$$4. Q = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

ta viết $Q = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} dx$ và đặt $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \tan t; t \in (-\pi/2; \pi/2) \Rightarrow Q = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

Chú ý: Nếu gặp tích phân chứa $a+bx^2$ hoặc $\sqrt{a+bx^2}$ thì ta viết:

$$a+bx^2 = a \left[1+\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x\right)^2\right] \text{ hoặc } \sqrt{a+bx^2} = \sqrt{a} \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x\right)^2} \text{ và ta đặt } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x = \tan t; t \in (-\pi/2; \pi/2)$$

Cách đặt 3. Nếu tích phân có chứa $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ thì ta đặt ta đặt $x = a \cos 2t; t \in [0; \pi/2]$ và lưu ý vận dụng

$$\begin{cases} 1 - \cos 2t = 2 \sin^2 t \\ 1 + \cos 2t = 2 \cos^2 t \end{cases}$$

Ví dụ 4. Tính:

$$1. I = \int_{-a}^0 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx; a > 0 \text{ ta đặt } x = a \cos 2t; t \in [0; \pi/2] \text{ suy ra } I = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} (-2a \sin 2t) dt = a \frac{4-\pi}{4}$$

$$2. J = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \text{ ta đặt } x = \cos 2t; t \in [0; \pi/2] \text{ suy ra } J = \int_{\pi/4}^{\pi/8} \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} (-2 \sin 2t) dt =$$

$$J = 4 \int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos^2 t dt = \frac{\pi + 4 - 2\sqrt{2}}{4} \quad \{\text{có thể đặt } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t \text{ suy ra tích phân J về dạng tích phân của hàm số hữu tỷ}\}$$

B - Phương pháp đổi biến số dạng 2:

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Đặt $t = v(x)$
- Bước 2. Lấy vi phân $dx = u'(t)dt$ và biểu thị $f(x)dx$ theo t và dt . Chẳng hạn $f(x)dx = g(t)dt$
- Bước 3. Đổi cận khi $x = a$ thì $u(t) = a$ ứng với $t = \alpha$; khi $x = b$ thì $u(t) = b$ ứng với $t = \beta$
- Bước 4. Biến đổi $I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$ (tích phân này để tính hơn thì phép đổi biến mới có ý nghĩa)

Cách đặt đổi biến dạng 2.

Cách đặt 1. Nếu hàm số chứa ẩn ở mẫu thì đặt $t =$ mẫu số.

Ví dụ 1. Tính:

$$1. I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx \text{ ta có thể đặt } t = 4 - \cos^2 x \text{ suy ra } I = \int_3^4 \frac{dt}{t} = \ln \frac{4}{3}$$

$$2. J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx \text{ đặt } t = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1 + \cos^2 x \text{ suy ra } J = \int_{3/2}^2 \frac{dt}{t} = \ln \frac{3}{4}$$

{có thể hạ bậc để biến đổi tiếp mẫu số về $\cos 2x$ sau đó đưa $\sin 2x$ vào trong vi phân}

$$\text{Đề xuất: } J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx \text{ với } a^2 + b^2 > 0$$

$$3. K = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 5} dx \text{ ta đặt } t = e^x + 5 \Rightarrow e^x = t - 5 \Rightarrow e^x dx = dt \text{ sau đó làm xuất hiện trong tích phân biểu}$$

$$\text{thức } e^x dx \Rightarrow K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x (e^x + 5)} = \int_6^7 \frac{dt}{t(t-5)} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{t-5}{t} \right| \Big|_6^7 = \frac{1}{5} \ln \frac{12}{7}$$

$$\{\text{Có thể biến đổi trực tiếp } K = \frac{1}{5} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 5 - e^x}{e^x + 5} dx = \frac{1}{5} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 5}{e^x + 5} dx - \frac{1}{5} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 5} dx = \frac{1}{5} \ln \frac{12}{7} \}$$

$$4. H = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \cos x}{(2 \sin x - \cos 2x + 4)^2} dx \text{ ta đặt } t = 2 \sin x - \cos 2x + 4 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{21}$$

{đôi khi không đặt cả MS}

$$5. G = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx \text{ chú ý rằng tách mũ } 3 = 2 + 1 \text{ đặt}$$

$$t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = t - 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x dx = -dt \text{ khi đó: } G = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)}{t} dt = \left(\frac{1}{2} (t - \ln|t|) \right) \Big|_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$6. M = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x + 2} dx$$

ta đặt $t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$ lưu ý $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

$$M = \int_0^{\pi/4} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x + 2} dx = \int_3^{2+\sqrt{2}} \frac{(t-2)dt}{t} = (t - 2 \ln|t|) \Big|_3^{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 + \ln \frac{\sqrt{2} + 2}{3}$$

$$7. N = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx \text{ đặt } t = \sin x + \cos x + 2 \text{ suy ra}$$

$$N = \int_3^{2+\sqrt{2}} \frac{(t-2)dt}{t^3} = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) \Big|_3^{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$\text{Đề xuất: } M_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x + 2} dx \text{ và } N_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 2)^3} dx$$

8.

Cách đặt 2. Nếu hàm số chứa căn thức $\sqrt[n]{\varphi(x)}$ thì đặt $t = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ sau đó lũy thừa 2 vế và lấy vi phân 2 vế.

Ví dụ 1. Tính:

$$1. I = \int_0^1 \frac{4x-3}{2+\sqrt{3x+1}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{3}(t^2-1) \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt \text{ khi đó đưa tích phân về dạng:}$$

$$I = \frac{2}{9} \int_1^2 \frac{4t^3-13t}{2+t} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (4t^2-8t+3)dt - \frac{2}{9} \int_1^2 \frac{6}{2+t} dt = \frac{2}{27} - \frac{4}{3} \ln \frac{4}{3}$$

$$2. J = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow x^2 = t^3-1 \Rightarrow 2xdx = 3t^2dt \Rightarrow J = \frac{3}{2} \int_1^2 (t^4-t)dt = \frac{141}{20}$$

$$3. K = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2 = t^2-1 \Rightarrow xdx = tdt \Rightarrow J = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$$

$$4. H = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^3}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt{1+x^3} \Rightarrow x^3 = t^2-1 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt \text{ nhân cả tử và mẫu số với } x^2 \text{ ta được:}$$

$$H = \int_1^2 \frac{xdx}{x^2\sqrt{1+x^3}} = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$5. G = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2 = t^2-1 \Rightarrow xdx = tdt \text{ nhóm } x^2.x.(x^2+2) \text{ ta được:}$$

$$G = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+2)x^2.x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^2 \frac{(t^2+1)(t^2-1)tdt}{t} = \left(\frac{t^5}{5} - t \right) \Big|_1^2 = \frac{26}{5}$$

$$6. M = \int_{-1}^6 \frac{1}{\sqrt{9x+1} + \sqrt[3]{9x+1}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt[6]{9x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{9}(t^6-1) \Rightarrow dx = \frac{2}{3}t^5dt \text{ lũy thừa bậc hai và bậc ba}$$

$$\text{ta có: } M = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t^3dt}{t+1} = \frac{2}{3} \int_1^2 (t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt = \frac{2}{3} \left(\frac{11}{6} + \ln \frac{2}{3} \right)$$

Ví dụ 2. Tính:

$$1. [\text{ĐH.2005.A}] P = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx \text{ ta đặt } t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}(t^2-1) \Rightarrow \sin x dx = -\frac{2}{3}tdt \text{ nhóm}$$

$$\text{nhân tử } \sin x \text{ ta có: } P = \int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos x+1)\sin x dx}{\sqrt{1+3\cos x}} = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2+1)dx = \frac{2}{9} \left[\frac{2t^3}{3} + t \right]_1^2 = \frac{34}{27}$$

2. $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + \sin 2x}{\sqrt{1+3\sin x}} dx$ ta đặt $t = \sqrt{1+3\sin x} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow \cos x dx = \frac{2}{3} t dt$ áp dụng công thức

nhân đôi và nhân 3 ta viết: $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^3 x - 3\cos x + 2\sin x \cos x}{\sqrt{1+3\sin x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4-4\sin^2 x - 3 + 2\sin x}{\sqrt{1+3\sin x}} \cdot \cos x dx$

Vậy $Q = \frac{2}{27} \int_1^2 (-4t^4 + 14t^2 - 1) dt = \frac{2}{27} \left(-\frac{4}{5}t^5 + \frac{14}{3}t^3 - t \right) \Big|_1^2 = \frac{206}{405}$

3. [ĐH.2006.A] $R = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$ ta đặt $t = \sqrt{1+3\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow$

$\sin 2x dx = \frac{2}{3} t dt$. khi đó: $R = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t dt}{t} = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$

4.

Ví dụ 3. Tính:

1. $P = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$

Ta đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt$ khi đó: $P = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t) dx = \frac{116}{135}$

2. $Q = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}} dx$

Ta đặt $t = \sqrt{1+2\ln x} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) \Rightarrow \frac{dx}{x} = t dt$. Khi đó:

$Q = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{3-(t^2-1)t dt}{t} = \int_1^{\sqrt{2}} (4-t^2) dt = \left(4t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{3}-11}{3}$

3. $R = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$. Ta đặt $t = \sqrt{e^x + 1}$ suy ra $e^x dx = 2t dt \Rightarrow R = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{2t dt}{t^2 - 1} = \ln \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

4. $S = \int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{e^x}}$. Ta đặt $t = \sqrt[3]{e^x}$ suy ra $S = \int_1^e \frac{3dx}{t(t+1)} = 3 \ln \frac{2e}{e+1}$

5. $X = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} dx}{e^x + 3}$

Cách đặt 3. Nếu hàm số chứa các đại lượng $\sin x$, $\cos x$ và $\tan \frac{x}{2}$ thì ta đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ khi đó

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ví dụ 4. Tính:

1. $Q = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5\sin x + 3\cos x + 5} dx$

Ta đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ và $Q = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 5t + 4} dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t+1}{t+4} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$

2. $L = \int_0^{\pi/3} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\cos x + 2} dx$ ta đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ và $L = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2t dt}{t^2 + 3} = \ln |t^2 + 3| \Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \ln \frac{10}{9}$

$$3. V = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos 2x + \sin 2x + 1} dx \text{ ta đặt } t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ và } V = \int_0^1 \frac{(1+t)dt}{2(1+t^2)} = \int_0^1 \frac{dt}{2(1+t^2)} + \int_0^1 \frac{tdt}{2(1+t^2)}$$

$$= V_1 + \frac{1}{4} \ln|t^2 + 1| \Big|_0^1 \text{ ta tính } V_1 = \int_0^1 \frac{dt}{2(1+t^2)} \stackrel{t=\tan y}{=} \frac{\pi}{8} \text{ suy ra } V = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos 2x + \sin 2x + 1} dx = \frac{\pi + 2 \ln 2}{8}$$

$$4. N = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin 2x - \sin^2 x + 1} dx \text{ ta viết } N = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 x}{\cos 2x + \sin 2x + 1} dx \text{ và đặt}$$

$$t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ suy ra } N = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+t^2}{t+1} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{3 + 2 \ln 2}{4}$$

$$5. [\text{ĐH.2008.B}] F = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx \text{ ta viết } F = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x - \cos x)}{2 \sin x \cos x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx \text{ dựa}$$

vào mối quan hệ giữa $\sin x + \cos x$ và $\sin x \cos x$ ta đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx$ và

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \text{ khi đó } F = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-dt}{t^2 - 1 + 2(1+t)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{t+1} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Cách đặt 4. Dựa vào đặc điểm hai cận của tích phân.

Nếu tích phân có dạng $I = \int_{-a}^a f(x)dx$ thì ta có thể viết $I = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ đặt $t = -x$ để biến đổi $I_1 = \int_{-a}^0 f(x)dx$

Nếu tích phân có dạng $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$ thì ta có thể đặt $t = \pi - x$

Nếu tích phân có dạng $I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ thì ta có thể đặt $t = 2\pi - x$

Nếu tích phân có dạng $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$ thì ta có thể đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$

Nếu tích phân có dạng $I = \int_a^b f(x)dx$ thì ta có thể đặt $t = (a+b) - x$

Ví dụ 4. Tính:

1. $I = \int_{-1}^1 x^{2008} \sin x dx$ ta viết $I = \int_{-1}^0 x^{2008} \sin x dx + \int_0^1 x^{2008} \sin x dx = A + B$. Ta đặt $t = -x$ thì $A = -B$. vậy $I = 0$.

2. $J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ta đặt $t = \pi - x$ khi đó $J = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$ ta đổi biến tiếp:

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \stackrel{\cos t = \tan u}{=} \frac{\pi^2}{2} \text{ và } J_2 = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \stackrel{t=-x}{=} J. \text{ Vậy } J = \frac{\pi^2}{2} - J \Rightarrow J = \frac{\pi^2}{4}$$

Cách đặt 4. Nếu tích phân có chứa $\sqrt{ax^2 + bx + c}$; $a > 0$ thì ta có thể đặt $t = \sqrt{ax} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ sau đó tính x theo t và tính dx theo t và dt . {Phép thế ơ}

Ví dụ 5. Tính:

1. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ ta đặt $t = x = \sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{2t+1} \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{2dt}{2t-1} = \ln 3$

2. $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 2x + 1}}$ ta đặt $t = 3x = \sqrt{9x^2 - 2x + 1} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2(3t-1)} \Rightarrow J = \int_1^{2\sqrt{2}} \frac{dt}{3t-1} = \frac{1}{3} \ln \frac{6\sqrt{2}-1}{2}$

III) Phương pháp tích phân từng phần

-Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$. Khi đó ta thực hiện các bước tính:

Bước 1. Viết tích phân dưới dạng: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x).h(x)dx$

Bước 2. Đặt $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = h(x).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = g'(x)dx \\ v = \int h(x).dx \end{cases}$

Bước 3. áp dụng công thức: hay $\int_a^b u.dv = u.v \Big|_a^b - \int_a^b v.du$

Các cách đặt để tích phân từng phần:

+Cách đặt 1. Nếu tích phân có dạng $I = \int_a^b P(x). \sin ax.d x$ thì ta sẽ đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin ax.d x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = -\frac{\cos ax}{a} \end{cases}$

Nếu tích phân có dạng $\int_a^b P(x). \cos ax.d x$ thì ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos ax.d x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{\sin ax}{a} \end{cases}$

Nếu tích phân có dạng $\int_a^b P(x).e^{ax}.dx$ thì ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

Ví dụ 5. Tính:

1. $I = \int_0^{\pi} (3x - 1). \sin 2x.d x$ ta đặt

$$\begin{cases} u = 3x - 1 \\ dv = \sin 2x.d x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3dx \\ v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow I = - (3x - 1) \frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi} + \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x.d x = -\frac{3\pi}{2}$$

2. $J = \int_0^{\pi/2} (x^2 + 1). \cos x.d x$ ta đặt $\begin{cases} u = x^2 + 1 \\ dv = \cos x.d x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = (x^2 + 1) \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x. \sin x.d x = \frac{\pi^2 + 4}{4} - 2J_1 \text{ ta tính } J_1 = \int_0^{\pi/2} x. \sin x.d x \text{ bằng cách đặt}$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x.d x \end{cases} \text{ sau đó suy ra } J_1 = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x.d x = 1. \text{ Vậy } J = \frac{\pi^2 + 4}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 4}{4}$$

3. $L = \int_0^1 (x^2 - x + 1).e^{3x}.dx$ ta đặt

$$\begin{cases} u = x^2 - x + 1 \\ dv = e^{3x}.dx \end{cases} \Rightarrow L = \frac{1}{3} (x^2 - x + 1) e^{3x} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (2x - 1).e^{3x}.dx = \frac{e^3 - 1}{3} - \frac{1}{3} L_1$$

$$\text{Tính tiếp } L_1 = \int_0^1 (2x - 1).e^{3x}.dx \text{ đặt } \begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = e^{3x}.dx \end{cases} \Rightarrow L_1 = \frac{4e^3 - 4}{9} \text{ suy ra } L = \frac{5e^3 - 5}{27}$$

4. $M = \int_0^{\pi} (\sqrt{x} \sin x)^2.d x$ ta viết $M = \int_0^{\pi} x \sin^2 x.d x = \int_0^{\pi} x \frac{1 - \cos 2x}{2}.dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos 2x.d x$

$$\text{xét } M_1 = \int_0^{\pi} x \cos 2x.d x \xrightarrow[u=\cos 2x]{u=x} 0. \text{ vậy ta có } M = \frac{\pi^2}{4}$$

5. $M = \int_0^{\pi^2/4} \sin \sqrt{x}.dx$ ta đổi biến $t = \sqrt{x}$ để đưa $M = \int_0^{\pi/2} 2t \sin t.d t$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t.d t \end{cases} \Rightarrow M = 2$

+Cách đặt 2. Nếu tích phân có dạng $I = \int_a^b e^{ax} \sin bx \cdot dx$ thì ta đặt $\begin{cases} u = \sin bx \\ dv = e^{ax} \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b \cos bx dx \\ v = \frac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

Nếu tích phân có dạng $I = \int_a^b e^{ax} \cos bx \cdot dx$ thì ta đặt $\begin{cases} u = \cos bx \\ dv = e^{ax} \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b \sin bx dx \\ v = \frac{e^{ax}}{a} \end{cases}$

Ví dụ 6. Tính:

1. $I = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cdot \sin 3x \cdot dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 \cos 3x dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \sin 3x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos 3x \cdot dx = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{3}{2} I_1$ (*). Ta xét $I_1 = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos 3x \cdot dx$ và đặt $\begin{cases} u = \cos 3x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow$

$I_1 = -\cos 3x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin 3x \cdot dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} I$ thay vào (*) ta có: $I = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} I \right) \Rightarrow I = -\frac{2e^\pi + 3}{13}$

2. $F = \int_0^\pi (e^x \cdot \sin x)^2 \cdot dx$ ta viết $F = \int_0^\pi e^{2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cdot dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos 2x \cdot dx$

Ta xét $F_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cdot dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$. Sau hai lần tích phân từng phần ta tính được $F_2 = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{2x} \cos 2x \cdot dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}$.

Vậy ta có: $F = \int_0^\pi (e^x \cdot \sin x)^2 \cdot dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{8}$

+Cách đặt 3. Nếu tích phân có dạng $I = \int_a^b \ln[P(x)]Q(x)dx$ thì ta đặt $\begin{cases} u = \ln[P(x)] \\ dv = Q(x) \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{P'(x)}{P(x)} dx \\ v = \int Q(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 7. Tính:

1. $I = \int_2^5 x \cdot \ln(x-1) dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \ln[x-1] \\ dv = x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln(x-1) \Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{x^2}{2x-2} dx$

$= \frac{48 \ln 2 + 27}{4}$

2. $J = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \ln[x + \sqrt{1+x^2}] \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow J = \sqrt{3} \ln(\sqrt{3} + 2) - 1$

3. $K = \int_1^e x \cdot \ln^2 x dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x dx \end{cases}$ suy ra $K = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \ln x dx$. Xét $K_1 = \int_1^e x \cdot \ln x dx$ và đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$ thì $K_1 = \frac{e^2 + 1}{4} \Rightarrow K = \frac{e^2 - 1}{4}$.

4. $H = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{-5} dx \end{cases}$ suy ra $H = -\frac{1}{4x^4} \ln x \Big|_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 x^{-5} dx = \frac{15 - 4 \ln 2}{256}$.

5. $G = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$ đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cot x dx \\ v = \tan x \end{cases} \Rightarrow I = \tan x \ln(\sin x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx = \frac{3\sqrt{3} \ln 3 - 4\sqrt{3} \ln 2 - \pi}{6}$

$$6. F = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx \text{ đặt } \begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = x \cos(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx (*) . \text{ Ta xét}$$

$$F_1 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx \text{ đặt } \begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow F_1 = x \sin(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = -F \text{ thay}$$

$$\text{vào (*) ta có: } F = -e^\pi - 1 - F \Rightarrow F = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$

III) Phương pháp tìm hệ số bất định

A- Khi gặp tích phân: $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức của x .

Bước 1: Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta lấy $P(x)$ chia cho $Q(x)$ được thương $A(x)$ và dư $R(x)$, tức là $P(x) = Q(x).A(x) + R(x)$, với bậc $R(x) <$ bậc $Q(x)$.

$$\text{Suy ra: } \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int A(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Bước 2: Ta đi tính: $I = \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$, với bậc $R(x) <$ bậc $Q(x)$.

Có thể xảy ra các khả năng sau:

+ **Khả năng 1:** Với $Q(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) thì bậc $R(x) < 2 \Rightarrow R(x) = M.x + N$ và $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{M.x + N}{ax^2 + bx + c}$

TH1: $Q(x)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 , tức là: $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Chọn hằng số A, B sao cho: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{M.x + N}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$

TH2: $Q(x)$ có nghiệm kép x_0 , tức là: $Q(x) = a(x - x_0)^2$.

Chọn hằng số A, B sao cho: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{M.x + N}{a(x - x_0)^2} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2}$

TH3: $Q(x)$ vô nghiệm. Chọn hằng số A, B sao cho: $R(x) = A.Q'(x) + B$ và $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A.Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B}{Q(x)}$

+ **Khả năng 2:** Với $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) thì bậc $R(x) < 3$

TH1: $Q(x)$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 , tức là: $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Chọn hằng số A, B, C sao cho: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}$

TH2: $Q(x)$ có 1 nghiệm đơn x_1 , 1 nghiệm kép x_0 , tức là: $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_0)^2$

Chọn hằng số A, B, C sao cho: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{a(x - x_1)(x - x_0)^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_0} + \frac{C}{(x - x_0)^2}$

TH3: $Q(x)$ có một nghiệm x_0 (bội 3), tức là: $Q(x) = a(x - x_0)^3$

Chọn hằng số A, B, C sao cho: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{a(x - x_0)^3} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \frac{C}{(x - x_0)^3}$

TH4: $Q(x)$ có đúng một nghiệm đơn x_1 , tức là: $Q(x) = (x - x_1)(ax^2 + \beta x + \gamma)$ (trong đó $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma < 0$).

Chọn hằng số A, B, C sao cho: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x - x_1)(ax^2 + \beta x + \gamma)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{Bx + C}{ax^2 + \beta x + \gamma}$

+ **Khả năng 3:** Với bậc $Q(x) > 3$ thì thông thường ta gặp $Q(x)$ là các biểu thức đơn giản như: $x^4 + 1$; $x^4 \pm x^2 + 1$; $x^6 + 1$

Ví dụ 1. Tính các tích phân:

1. $I = \int_{-1}^0 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$ ta viết $I = \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{4x-1}{x^2 - 3x + 2} \right) dx$ và viết $\frac{4x-1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ Sau đó chọn được

$A = -3; B = 7$. Khi đó: $I = (x - 3\ln|x-1| + 7\ln|x-2|) \Big|_{-1}^0 = 10\ln 2 - 7\ln 3$.

2. $J = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$ ta viết $x = A(x^2 + x + 1)' + B$ suy ra $A = 1/2; B = -1/2$. Vậy $J = J_1 + J_2$ với

$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \ln 3$ và $J_2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]^2 + 1}$

Ta đặt $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) = \tan u$ suy ra $J_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} du = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

3. $K = \int_1^3 \frac{1}{x^3 + 3x} dx$ ta viết $\frac{1}{x^3 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ sau đó chọn được $A = 1/3, B = -1/3, C = 0$. Vì thế viết được

$K = \int_1^3 \frac{1}{3x} dx - \int_1^3 \frac{x}{3(x^2 + 3)} dx = \frac{1}{6} \ln 3$ {Vì đưa được x vào trong vi phân}.

4.

B – Khi gặp tích phân $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x} dx$ ($c, d \neq 0$) thì ta viết TS = A.(MS) + B.(MS)' tức là chọn A, B sao cho:

$a \sin x + b \cos x = A(c \sin x + d \cos x) + B(c \sin x + d \cos x)'$ hoặc đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ví dụ 1. Tính:

1. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x + 5 \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ta viết $3 \sin x + 5 \cos x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x)$ suy ra $A = 4; B = 1$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} 4 dx + \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = (4x + \ln|\sin x + \cos x|) \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi$

2. $J = \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x + \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$ ta viết $3 \sin x + \cos x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x)$ suy ra $A = 2; B = -1$.

Khi đó: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} = \left(-\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2(\sin x + \cos x)^2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2$

C – Khi gặp tích phân $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \sin x + b \cos x + m}{c \sin x + d \cos x + n} dx$ ($c, d \neq 0$) thì ta viết TS = A.(MS) + B.(MS)' + C. Chọn A, B, C sao cho:

$a \sin x + b \cos x + m = A(c \sin x + d \cos x + n) + B(c \sin x + d \cos x + n)' + C$ hoặc có thể đặt

$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ví dụ 1. Tính:

1. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{7 \sin x - \cos x + 7}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$ ta viết $7 \sin x - \cos x + 7 = A(4 \sin x + 3 \cos x + 5) + B(4 \cos x - 3 \sin x) + C$

Khi đó $A = 1; B = -1; C = 2$ và $I = \int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{d(4 \sin x + 3 \cos x + 5)}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{2}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$

Xét $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$ đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ suy ra

$$I_1 = 2 \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2} dt = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } I = \left(x - \ln |4 \sin x + 3 \cos x + 5| \right) \Big|_0^{\pi/2} + I_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} - \ln \frac{9}{8}$$

V) Phương pháp dùng tích phân liên kết

Ví dụ 1. Tính:

1. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$ ta xét thêm tích phân thứ hai: $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$ Khi đó: $I + J = \frac{\pi}{2}$ (*).

Mặt khác $I - J = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x - \cos x) dx}{\sin x + \cos x} = - \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = 0$ (**). Giải hệ (*) và (**) suy ra $I = J = \frac{\pi}{4}$.

2. $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$ ta xét $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$. Khi đó: $I_n + J_n = \frac{\pi}{2}$ (*)

Mặt khác nếu đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$ thì $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = J_n$ (**). Từ (*), (**) ta có $I_n = \frac{\pi}{4}$

3. $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}} dx$ tương tự xét $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}} dx$ và suy ra $I_n = J_n = \frac{\pi}{4}$

4. $E = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$ và $F = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$ ta có $E + F = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$ (*)

Lại có $E - 3F = \int_0^{\pi/6} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx = 1 - \sqrt{3}$ (**). Giải hệ (*), (**) ta được: $E = \frac{1}{16} \ln 3 - \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$ và

$F = \frac{3}{16} \ln 3 + \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$. Mở rộng tính $E = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 2x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = F - E = \frac{1}{8} \ln 3 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

Đề xuất $L = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 2x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x} dx$

CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ.

A – Phương pháp biến đổi trực tiếp

1. [ĐHNLI.98.A] $M = \int_0^1 \frac{(1+e^x)^2 dx}{1+e^{2x}}$

+ Bình phương và phân tích thành 2 phân số đơn giản.
+ Biết đổi biến.

Giải: $M = \int_0^1 \frac{1+e^{2x} dx}{1+e^{2x}} + \int_0^1 \frac{2e^x dx}{1+e^{2x}}$ ta tính $M_1 = \int_0^1 \frac{2e^x dx}{1+e^{2x}}$ đặt $e^x = \tan t, t \in (-\pi/2; \pi/2)$ khi đó với $\tan \alpha = e$ và

$$M_1 = \int_{\pi/4}^{\alpha} \frac{2 \tan t dt}{(1 + \tan^2 t) \cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\alpha} 2 \tan t dt = -2 \ln |\cos t| \Big|_{\pi/4}^{\alpha} = -2 \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 t}} \right| \Big|_{\pi/4}^{\alpha} = \ln \frac{1+e^2}{2}$$

2. [ĐHTCKT.97] $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{1 + \cos x}$

Giải:

2. [ĐHTCKT.97] $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{1 + \cos x}$

Giải:

$$2. [\text{ĐHTCKT.97}] \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x dx}{1 + \cos x}$$

+

Giải:

$$2. [\text{ĐHTCKT.97}] \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x dx}{1 + \cos x}$$

+

Giải:

$$1. [\text{ĐHNH.98.A}] \int_0^1 \frac{(1 + e^x)^2 dx}{1 + e^{2x}}$$

$$2. [\text{ĐHTCKT.97}] \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x dx}{1 + \cos x}$$

$$3. [\text{ĐHBK.98}] \int_0^{\pi/2} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$4. [\text{ĐHDLĐ.98}] \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \frac{\pi}{6})} dx$$

$$6. \int_e^{e^2} \frac{\ln x + \ln(\ln x)}{x} dx$$

$$7. [\text{ĐHMD.00}] \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \sin(x + \frac{\pi}{6})} dx$$

$$8. \int_0^{\pi/3} \cos^4 x \sin 2x dx$$

$$9. [\text{ĐHNN.01}] \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$10. [\text{ĐHNH.01}] \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$$

$$11. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^4 x dx$$

$$12. [\text{CĐGTVT.01}] \int_{-2}^3 |x^2 + 3x| dx$$

$$13. [\text{CĐSPBN.00}] \int_0^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx$$

$$14. \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

$$15. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$$

$$16. \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$17. \int_{-1}^1 \sqrt{4 - |x|} dx$$

$$\text{Đáp: } 2(5 - \sqrt{3})$$

$$18. \int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x} dx$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$19. \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

$$8$$

$$20. \int_0^3 \frac{x^2 + |x-1|}{x^2 + |x-2|} dx$$

$$21. \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos 2x} dx$$

$$4$$

$$22. \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$$

$$2\sqrt{2}$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin x} dx$$

$$4\sqrt{2}$$

$$24. \int_0^1 |x-a| dx; a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -m + 1/2 \sim m \leq 0 \\ m^2 - m + 1/2 \sim 0 < m \leq 1 \end{cases}$$

$$25. \int_1^2 |x^2 - (a+1)x + a| dx; a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} a \geq 2 & \text{ thì đs: } (3a-5)/6; \\ 1 < a < 2 & \text{ thì đs: } (a-1)^3/3 - (3a-5)/6 \\ a \leq 1 & \text{ thì đs: } (5-3a)/6 \end{aligned}$$

$$26. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x} dx$$

$$28. [\text{ĐH.2005.D}] \int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$$

$$28. [\text{ĐH.2003.D}] \int_0^2 |x^2 - x| dx$$

$$29. [\text{ĐH.2003.B}] \int_0^{\pi/4} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$29. M = \int_0^{\pi/2} (\sin^6 x + \cos^6 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x) dx$$

$$30. N = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx$$

$$31.$$

B – Phương pháp đổi biến

1. [CĐBN.01] $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$

HD đặt fsf

2. [PVB.01] $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} .dx$

3. $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 2}$

4. [CĐXD.01] $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$

5. [ĐHKTQD.97] $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$

Đề xuất: $\int_0^1 x^2 (1-x)^7 dx$

6. [ĐHQG.97.B] $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

7. [ĐH.2004.A] $\int_1^2 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}-1}$

8. [ĐH.2003.A] $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

9. [ĐHSPHN.00.B] $\int_0^{\pi} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$

10. [ĐHBK.00] $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$

11. $\int_{14}^{23} \frac{dx}{x+8-5\sqrt{x+2}}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$

14. $\int_2^6 \frac{1}{2x+\sqrt{4x+1}} dx$

15. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$

16. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x + \ln(\ln x)}{x} dx$

17. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

18. $\int_0^1 \frac{10x^3 + 3\sqrt{x^2+1} + 10x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} dx$

19. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$
20. $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} \right) dx$
21. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt{2x+1}} dx$
23. $\int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$
24. $\int_2^7 \frac{1}{x + \sqrt{x+2}} .dx$
25. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x^2)^2}$
26. [GTVT.00] $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$
27. [ĐHAN.97] $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$
28. [ĐHLN.00] $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \sin x + \cos x} dx$
29. [ĐHHĐ.00] $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan x} dx$
30. [ĐHVN.01] $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{\sin 2x + \cos 2x} dx$
31. [HVBCVT.98] $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^3 x dx}{1 + \cos^2 x}$
32. $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$
33. [ĐHTN.01] $\int_1^{(1+\sqrt{5})/2} \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$
34. [ĐHTCKT.00] $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$
35. [HVKTQS.98] $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x+\sqrt{1+x^2})}$
36. [PVBáo.01] $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} .dx$
37. [ĐH.2004.B] $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$
38. [ĐH.2005.A] $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

$$39. [\text{ĐH.2006.A}] \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$$

$$40. [\text{ĐH.2005.B}] \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$41. [\text{ĐH.2005.B}] \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$$

$$42. [\text{ĐH.2003.A}] \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$43. [\text{ĐH.2004.A}] \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$$

$$44. [\text{ĐH.2008.A}] \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

$$45. [\text{Đề thi thử ĐH}] \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$46. [\text{Đề thi thử ĐH}] \int_1^e \left(\frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}} + x^2 \right) \cdot \ln x \cdot dx$$

$$47. [\text{Đề thi thử ĐH}] \int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$48. [\text{Đề thi thử ĐH}] \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2(1 + \sin x)^3} dx$$

$$\text{HD: Đặt } t = 1 + \sin x \Rightarrow \int_1^2 \frac{2(t-1)dt}{2t^3} = \frac{1}{8}$$

$$49. I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$$

$$50. J = \int_2^4 \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{x} dx$$

$$51. K = \int_0^1 \frac{10x^3 + 3\sqrt{x^2 + 1} + 10x}{(1 + x^2)\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$52. H = \int_{-\ln 2}^{-\ln \sqrt{2}} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$$

$$53. G = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

$$54. F = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$$

$$55. D = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^4 x - 3\cos^2 x + 3} dx$$

$$56. S = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} dx}{e^x + 3}$$

$$57. T = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}$$

$$58. R = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x^2 + 9}}$$

$$59. E = \int_2^7 \frac{1}{x + \sqrt{x+2}} \cdot dx$$

$$60. W = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1 + \sqrt{2x+1}} \cdot dx$$

$$61. Q = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$62. M = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 6x + 1}}$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \text{ thì } Q = \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 + t^2} \stackrel{t = \sqrt{3} \tan u}{=} \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

C – Phương pháp tích phân từng phần

$$1. [\text{ĐHCD.97}] \int_0^1 (1+x)^2 e^{2x} dx$$

$$2. [\text{ĐHTCKT.98}] \int_0^{\pi/4} x(2 \cos^2 x - 1) dx$$

$$3. \int_0^2 x^3 \ln(x^2 + 1) dx \text{ và } \int_0^{10} x \lg^2 x dx$$

$$4. [\text{PVBáo.98}] \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

$$5. [\text{HVN.98}] \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$$

$$6. [\text{ĐHCD.00}] \int_1^2 \frac{\ln(x+1) dx}{x^2}$$

$$7. [\text{ĐHTL.01}] \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$$

$$8. \int_0^{\pi/2} x \tan^2 x dx$$

$$9. [\text{ĐHYHN.01}] \int_{\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx$$

$$10. [\text{Đề thi thử}] \int_1^2 x \ln(3x - x^2) dx$$

$$11. [\text{ĐH.2007.D}] \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$$

$$12. [\text{ĐH.2006.D}] \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$$

$$13. I = \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$$

$$14. J = \int_e^{e^2} \frac{\ln x + \ln(\ln x)}{x} dx$$

$$15. K = \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$$

$$16. H = \int_0^1 \frac{x}{\sin^2(2x+1)} dx$$

$$17. G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cdot \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$18. F = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^5 \cdot e^{x^2} dx$$

$$19. D = \int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}} dx$$

$$20. S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} + \ln^2 x \right) dx$$

$$21. A = \int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \cos^2 \sqrt{x} \cdot dx$$

$$22. P = \int_0^{\pi} (e^x \cdot \cos x)^2 dx$$

$$23. U = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} \cdot dx$$

$$24. Y = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$25. T = \int_0^{\pi/3} \frac{1+\sin x}{\sin x + \cos x} e^x dx$$

$$26. R = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$27. E = \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx$$

$$28. W = \int_0^{\pi/2} \cos x \ln(1+\cos x) dx$$

$$29. Q = \int_{1/e}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$30. M = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

Đặt $u = \frac{1+\sin x}{\sin x + \cos x}$; $dv = ..$ Xét $T_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1+\cos x} e^x dx$ và đặt tptp suy ra

$$T = \frac{e^x \sin x}{1+\cos x} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}e^{\pi/3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ĐS: } \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{ĐS: } \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{ĐS: } \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\text{ĐS: } \frac{2e}{e+1}$$

Viết $M = M_1 + M_2$. Với $M_1 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \ln \frac{3}{2}$ & $M_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{1+\cos x} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{1+\cos x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2 \cot \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow M_2 = \frac{(3-2\sqrt{3})\pi}{3} - \ln 4$$

$$\text{Vậy } M = \frac{(3-2\sqrt{3})\pi}{3} + \ln \frac{3}{8}$$

31. $M = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$

B – Phương pháp hệ số bất định

1. [ĐHYHN.00] $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^2 - 7x + 12}$

2. [ĐHNHI.00] $\int_1^2 \frac{1}{x(x^3 + 1)} dx$ và $\int_0^1 \frac{3}{x^3 + 1} dx$

3. [ĐHXD.98] $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x} dx$

4. [ĐHTM.00] $\int_0^{\pi/2} \frac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

5. [ĐHTN.98] $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^n \sqrt{1+x^n}}$

6. $I = \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 4} dx$

7. $J = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 7}{x^3 + 1} dx$

8. $K = \int_0^1 \frac{4x + 5}{x^2 + 3x + 2} dx$

9. $L = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - 3x - 4)^2}$

10. $Z = \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 4} . dx$

D – Phương pháp tích phân liên kết

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

2. [Đề thi thử] $I = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{x^4 - 1}{x^3} e^{\frac{x^2+1}{x}} dx$

HD: $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$. Suy ra

$$I = F(2 + \sqrt{3}) - F\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = 0$$

[ĐHTN.00] CMR: $\forall n \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0$$

[HVKTQS.01] $\int_0^b \frac{a - x^2}{(a + x^2)^2} dx, a, b > 0$

[ĐHLN.01] $\int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x + 1)^2} dx$